IdealのSaturationの問題について(ブール代数値の解析学と超準解析)

角田, 譲

数理解析研究所講究録
336巻 1978年 41-52

Ideal の saturation の問題について

神大 教養　角田 譲

κ を regular uncountable cardinal とする。I を κ の上の κ-complete non-principal ideal とする。すなわち I を次の条件を満足する $P(\kappa)$ の proper subset とする。

(i) 全ての $\xi < \kappa$ に対して $\{\xi\} \in I$,

(ii) $A \subseteq \kappa,\ A \subseteq B \in I \longrightarrow A \in I$,

(iii) $A \in I,\ B \in I \longrightarrow A \cup B \in I$,

(iv) $\langle A_\xi ;\ \xi < \zeta \rangle,\ \zeta < \kappa,\ A_\xi \in I\ (\forall \xi < \zeta)$
$$\longrightarrow \bigcup_{\xi<\zeta} A_\xi \in I.$$

Exemple 1. κ の subset A が κ において unbounded であるとは，任意の $\xi < \kappa$ に対して，$\xi < \zeta$ なる $\zeta \in A$ が存在する事である。$A \subseteq \kappa$ が unbounded でないば，A は，κ において bounded であるという。κ の bounded subsets の全体は，κ の上の κ-complete non-principal ideal

となる。実際それは、最小の κ の κ-complete non-principal ideal となる。

Exemple 2. κ の subset K が κ において closed であるとは、任意の limit ordinal $\alpha < \kappa$ に対して、$\alpha \cap K$ が、α において unbounded であるならば、常に $\alpha \in K$ となる事である。κ の subset S が stationary であるとは、任意の、κ の closed unbounded set K に対して、$K \cap S \neq \phi$ なる事である。κ の non-stationary set の全体は、κ の上の κ-complete non-principal ideal となる。

Exemple 3. κ が ineffable cardinal であるとは次の条件を満足する事をいう。(Jensen)

$A_\alpha \subseteq \alpha$ を満足する任意の sequence $\langle A_\alpha ; \alpha < \kappa \rangle$ に対して、$\{\alpha < \kappa ; \alpha \cap K = A_\alpha\}$ が stationary set となる κ の subset K が存在する。

κ を ineffable cardinal とする時、κ の subset B が ineffable であるとは、任意の sequence $\langle A_\alpha ; \alpha \in B \rangle$ に対して、$\{\alpha \in B ; \alpha \cap A = A_\alpha\}$ が stationary となる κ の subset A が、存在する事をいう。κ の non-ineffable subsets の全体は、κ-complete non-principal ideal となる。

I を κ の上の κ-complete non-principal ideal とする。

$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ が，I-disjoint であるとは，任意の異る，$A, B \in \mathcal{F}$ に対して，$A \cap B \in I$ が成立している事をいう．

δ が cardinal とする．I が δ-saturated であるとは，任意の I-disjoint family $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\kappa) - I$ に対して常に，$|I| < \delta$ なる事をいう．

I が 2-saturated の時，I は prime κ-complete non-principal ideal となる

Ideal の saturation の問題は，古くは，Tarski [ ] 等によって研究されたが，post-Cohen においては，Solovay, Kunen, Paris, Baumgartner 等によって種々の結果が得られている．特に最近，Prikry, Jech によって，Singular cardinal problem とも関連した結果が得られている．

しかしながら，次の問題は，依然として，現在未解決である．

“non-stationary set の全体の作る κ の上の κ-complete non-principal ideal は，κ^+-saturated であるか？”

Solovay は，non-stationary set の全体の作る ideal が，nowhere κ-saturated，すなわち，任意の stationary set が κ 個の disjoint な stationary set の合併となる事を証明している（Solovay [ ]）．

Solovay の上の結果は，次の2つの lemma が，本質的な

役割を果している。

Lemma 1. S を κ の上の stationary set とする時、$S - \{\alpha < \kappa : \alpha$ は S-stationary$\}$ は stationary set である。

Lemma 2. I を normal κ-saturated ideal (on κ) とする。S を stationary set とするならば、$\{\alpha < \kappa : \alpha$ は S-stationary$\}$ は I-measure one を持つ。

ここで、Lemma 1, Lemma 2 での用語を定義しておく。

S を ordinals よりなる class とするならば、ordinal α が S-stationary であるとは、i) $cf(\alpha) > \omega$、ii) $\alpha \cap S$ が α において stationary set なる事をいう。

κ の上の κ-complete non-principal ideal が normal であるとは、任意の $A \subseteq \kappa$, $A \notin I$, $f : A \longrightarrow \kappa$, $f(\alpha) < \alpha$, $\alpha \in A$, $\alpha \neq 0$ に対して、$f^{-1}(\{\xi\}) \notin I$ なる $\xi < \kappa$ が存在する事をいう。

Namba [ ] において、Solovay の上の結果を用いて、先に掲げた問題に対して、次の部分的な解答を得た。

Theorem. κ が κ-saturated normal ideal をもつならば、κ の上の non-stationary set の全体からなる ideal

は κ^+-saturated でない

先に掲げた問題の多くの approach は，ideal 全体のなす代数的構造に着目する事にある．$\mathbb{O}$ を以後，κ の上の，non-stationary set 全体の作る normal ideal，$\mathbb{1}$ を improper ideal，i.e., $\mathbb{1} = \mathcal{P}(\kappa)$ とする．$\mathbb{O}$ を含む ideal の全体の集合を $\mathcal{P}$ で表す．$I, J \in \mathcal{P}$ に対して，$I \leq J$ は，$I \subseteq J$ を意味する．その時，$\langle \mathcal{P} ; \leq \rangle$ は，順序集合となるが，実際，pseudo-Boolean algebra となる．$\mathcal{P}$ が束になる事は，$I \wedge J$，$I \vee J$ を次の様に定義すれば良い．

$$I \wedge J = I \cap J$$

$$I \vee J = \{A \cup B ;\ A \in I,\ B \in J\}$$

pseudo-complement に対しては，$I \Rightarrow J$ を，次の様に，定義すれば良い．

$$I \Rightarrow J = \{A \subseteq \kappa ;\ I \leq J \upharpoonright A\}$$

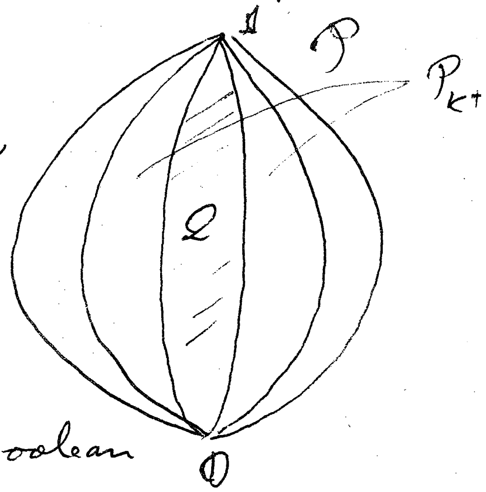
但し，ここで，$J \upharpoonright A = \{B \subseteq \kappa ;\ A \cap B \in J\}$ である．

ゆえに，$-I$ は，$I \Rightarrow \mathbb{O}$ で定義される．I が，$\mathcal{P}$ の dense element，すなわち，$-I = \mathbb{O}$ になるための必要十分条件は従って，$I \leq \mathbb{O} \upharpoonright A$ なる stationary set A が存在しないという事になる．

さて，$\mathcal{P}_{\kappa^+}$ で κ の上の normal ideals の全体とする．但し，ここで，improper ideal $\mathbb{1}$ も normal ideal とする

その時, $\mathcal{P}_{K^+}$ は $\mathcal{P}$ の subalgebra となる.

次に, $\mathbb{O}\ulcorner A$ なる型の ideal 全体を $\mathcal{Q}$ とすると, やはり $\mathcal{Q}$ もまた $\mathcal{P}$ の subalgebra となる. 実際に, $\mathcal{Q}$ は $[A]$ に対して, $\mathbb{O}\ulcorner(-A)$ を対応させる事によって, the quotient algebra $\mathcal{P}(K)/\mathbb{O}$ と同型となる. 但しここで $[A]$ は, $A\subseteq K$ の equivalence class modulo $\mathbb{O}$ を示す.



さて, 次に $\mathcal{P}$ における infinite join, meet を考える.

$\langle I_\lambda : \lambda\in\Lambda\rangle$ を $I_\lambda\in\mathcal{P}$ とすると, 明らかに $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\in\mathcal{P}$ となる.

ゆえに $\mathcal{P}$ は complete pseudo-Boolean algebra となるが, その infinite join を $\bigvee_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$, infinite meet を $\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ で示す事にする. 同様に $\mathcal{P}_{K^+}$ も complete pseudo-Boolean algebra となるが, その infinite join を $\bigvee^{K^+}_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ で示す事にする. (infinite meet については $\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda=\bigwedge^{K^+}_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ である) 一般に, $\bigvee_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\leq\bigvee^{K^+}_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ である.

次に, $\mathcal{P}$ の regular element の全体を $\mathcal{R}$ で示す. ($\mathcal{P}$ の regular element とは $--I=I$ なる元である.)

$I \Rightarrow J$ において，$J \in \mathcal{P}_{\kappa^+}$ であるならば，$I \Rightarrow J \in \mathcal{P}_{\kappa^+}$ となる事より，$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}_{\kappa^+}$ である事がわかる．又 $\mathcal{Q}$ は Boolean であるので，$\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{R}$ である．$\mathcal{R}$ は一般に $\mathcal{P}$ の subalgebra ではないが，$\mathcal{R}$ は次の operation によって Boolean algebra となる．

$$I \vee^* J = --I \vee J$$

$$I \wedge^* J = I \wedge J$$

$$-I = -I$$

$\mathcal{R}$ は又 complete Boolean algebra となる．実際，$\mathcal{R}$ は $\mathcal{Q}$ の minimal completion となる．$\mathcal{R}$ の infinite join，meet に関して，

$$\bigvee_{t \in T}^{*} I_t = --\bigvee_{t \in T} I_t$$

$$\bigwedge_{t \in T}^{*} I_t = \bigwedge_{t \in T} I_t$$

である．

$\langle I_t : t \in T \rangle$ を $I_t \in \mathcal{P}_{\kappa^+}$，$t \in T$ なるものとする．

Lemma 3. $A \in \bigvee_{t \in T}^{\kappa^+} I_t$ になるための必要十分条件は，次の条件を満足する $T_0 \subseteq T$ と，$(A_t)_{t \in T}$ が存在する事である．

i) $|T_0| \leq \kappa$

ii) $(\forall t \in T)(A_t \in I_t)$

iii) $(\forall t \in T - T_0)(A_t = \phi)$

iv) $\Phi 1 A = \bigvee^{*}_{t \in T}(\Phi 1 A_t)$

但し、ここで $\Phi 1 A = \Phi \upharpoonright (-A)$ である

Theorem. 次の (a) − (d) は、同値である

(a) Φ は κ^+-saturated である

(b) $\mathcal{Q} = \mathcal{P}_{\kappa^+}$

(c) $\mathcal{P}_{\kappa^+}$ の dense element は $\mathbb{1}$ のみである。すなわち、I を任意の normal ideal (proper) としておくと、$I \leq \Phi \upharpoonright A$ なる stationary set A が存在する。

(d) $\mathcal{P}_{\kappa^+}$ は Boolean algebra となる。

(Proof). (a) ⟺ (b) のみを証明すれば良い。今 Φ を κ^+-saturated とする。今、$I \in \mathcal{P}_{\kappa^+}$ を、任意の $A \subseteq \kappa$ に対して、$I \neq \Phi \upharpoonright A$ とする。さて、$\mathcal{F}$ を次の maximal family とする

i) $A \notin \Phi$, $A \in I$, $({}^{\forall}A \in \mathcal{F})$

ii) $\mathcal{F}$ は Φ-disjoint

$\mathcal{F}$ の存在に対しては、Zorn の補題より明らかである。

Φ が、κ^+-saturated である事より、$|\mathcal{F}| \leq \kappa$ となる。$(A_\xi)_{\xi<\kappa}$ を $\mathcal{F}$ の enumeration とする。$A = \{\alpha < \kappa ; (\forall \xi < \alpha)(\alpha \notin A_\xi)\}$ とおくと、I が normal である事より、A は I-measure one

を持つ. しかるに, 仮定により, $I \neq \mathcal{D}\restriction A$ である. 明らかに, $I \supseteq \mathcal{D}\restriction A$ であるので, $B\in I$, $B\notin \mathcal{D}\restriction A$ なる B が存在する. ゆえに, $B\cap A \in I$, $B\cap A\notin \mathcal{D}$ となる. $\mathcal{F}$ の maximality により, $B\cap A\cap A_\zeta \notin \mathcal{D}$ なる $\zeta<\kappa$ が存在する. $A\cap A_\zeta \subseteq \{\alpha<\kappa ; \alpha\le\zeta\}$ であるので, $A\cap A_\zeta$ は $\mathcal{D}$-measure zero となり. これは, $B\cap A\cap A_\zeta\notin\mathcal{D}$ に矛盾する.

逆に, $\mathcal{D}$ が κ^+-saturated でないと仮定する. その時, $A_\xi\cap A_\zeta \in \mathcal{D}$, $\xi<\zeta<\kappa^+$ なる $\{A_\xi ; \xi<\kappa^+\}\subseteq \mathcal{P}(\kappa)-\mathcal{D}$ が存在する. $J=\bigvee^{\kappa^+}_{\xi<\kappa^+}(\mathcal{D}\restriction A_\xi)$ とおく. しかるに, $\mathcal{L}=\mathcal{P}_{\kappa^+}$ であるので, $J=\mathcal{D}\restriction A$ なる $A\subseteq\kappa$ が存在する.

Lemma 3 により, $T\subseteq\kappa^+$ と, $(B_\xi)_{\xi<\kappa^+}$ が存在する

i) $|T|\le\kappa$,

ii) $B_\xi\in \mathcal{D}\restriction A_\xi$, $\forall\xi<\kappa^+$.

iii) $B_\xi=\phi$, $\forall\xi\in\kappa^+-T$

iv) $\mathcal{D}\restriction A = \bigvee^*_{\xi<\kappa^+}(\mathcal{D}\restriction B_\xi)$.

$|T|\le\kappa$ であるので, $\zeta\in\kappa^+-T$ なる ζ が存在する. $\mathcal{D}\restriction A_\zeta \le J=\mathcal{D}\restriction A$ であるので, $\mathcal{D}\restriction A_\zeta=\bigvee^*_{\xi<\kappa^+}(\mathcal{D}\restriction B_\xi)\wedge(\mathcal{D}\restriction A_\zeta)$. $\xi\in\kappa^+-T$ に対しては, $\mathcal{D}\restriction B_\xi=\phi$, ゆえに $(\mathcal{D}\restriction B_\xi)\wedge(\mathcal{D}\restriction A_\zeta)=\mathcal{D}$. $\xi\in T$ に対しては, $\xi\neq\zeta$ であるので, $(\mathcal{D}\restriction B_\xi)\wedge(\mathcal{D}\restriction A_\zeta)\le(\mathcal{D}\restriction A_\xi)\wedge(\mathcal{D}\restriction A_\zeta)=\mathcal{D}$. ゆえに, $(\mathcal{D}\restriction B_\xi)\wedge(\mathcal{D}\restriction A_\zeta)=\mathcal{D}$, $\forall\xi<\kappa^+$ となる.

ゆえに, $\mathbb{0} \cdot A_\xi = \bigvee^*_{\xi<\kappa^+} (\mathbb{0} \cdot B_\xi) \wedge (\mathbb{0} \cdot A_\xi) = \mathbb{0}$ となり.
これは $A_\xi \neq \mathbb{0}$ である事に反する.

上の定理により, non-stationary set の作る normal ideal が, κ^+-saturated でない事をいうには, dense な normal ideal を示す事になる. Solovay の前述した decomposition theorem は, 結局の所, κ-saturated normal ideal が non-stationary set の作る normal ideal に関して dense である事を示している. 又 Solovay [ ], で κ が κ-saturated ideal を持てば それは normal ideal を持つ事が証明されているので, Namba [ ] の前述した結果が上の定理により得られる.

さて, cardinal κ が Π^1_1-indescribable であるとは, 全ての κ の上の relation R と, 全ての $R, <$ に関する Π^1_1-sentence φ に関して,

$$\langle \kappa ; <, R \rangle \models \varphi \Rightarrow \exists \alpha < \kappa \, [\langle \alpha ; <, R \restriction \alpha \rangle \models \varphi]$$

が成立する事をいう.

Π^1_1-indescribable cardinal κ の subset A が, Π^1_1-indescribable である事も同様に ~~証明できる~~ 定義できる.

Lévy [ ], Baumgartner [ ] によって 次の事が判っている。

$\{A \subseteq \kappa;\ A$ は Π^1_1-indescribable でない$\}$ は、κ が Π^1_1-indescribable であれば、κ の上の normal ideal となる。また、それは non-stationary ideal に関して dense となる。ゆえに、次の事を得る。

系. κ が Π^1_1-indescribable であれば、κ の上の non-stationary ideal は κ^+-saturated でない。

上の系により κ が ineffable cardinal であれば、κ の上の non-stationary ideal は κ^+-saturated でない。

この事と、次の定理により、$V = L[J]$ (但し J はある measurable cardinal σ の上の σ-complete non-principal prime ideal) であれば、non-stationary sets よりなる normal ideal は κ^+-saturated でない事が判る。

定理 (Jensen, Devlin). $V = L[J]$ の仮定のもとでは、κ が ineffable である事と、$\neg KH(\kappa)$ とは同値である。

上の定理は、我々に次の問題を提起する。

"Non-stationary sets on κ の normal ideal が、κ^+-saturated となる regular uncountable cardinal κ の存在より、0^+ の存在がいえるか？".

この問題に関して、次の事は知られている。

定理 (Kunen) successor cardinal κ の上に、κ^+-saturated non-trivial ideal が存在すれば、0^+ の存在がいえる。

上の定理により、問題は limit cardinal の時になるが、それも、あまり large cardinal でない limit cardinal の時に問題となる。